**Раздел. Случайные события и их вероятности**

***Образец решения***

**Задача 1.**

Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найдите вероятность того, что он промахнется хотя бы один раз?

**Решение:**

Пусть событие А = {*хотя бы один раз охотник промахнется*}.

Так как известны вероятности попадания и непопадания охотником при каждом выстреле, то пусть события

{*попадание при i-ом выстреле*}, *i=*1,2,3, тогда

;

и пусть события {*непопадание при i-ом выстреле*}, *i=* 1,2,3, тогда

Введем событие {*охотник* *все три раза попадет*}, тогда и так как события (*i*=1,2,3) независимы, то .

Из того, что , имеем

или 66,4%.

**Ответ:** вероятность того, что охотник промахнется хотя бы один раз, равна 66,4%.

**Задача 2.**

Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

**Решение.**

### Пусть *А* – событие, при котором 2 выбранных велосипеда окажутся без дефектов. Любой выбор 2 велосипедов из 16, является равновозможным исходом. Значит, общее число равновозможных исходов равно числу сочетаний из 16 по 2, т.е. Исходом благоприятным, для события *А*, является выбор 2 исправленных велосипедов их имеющихся 12 исправных (16-4=12). Значит, число благоприятных для события *А* исходов равно Отсюда получаем, что



**Ответ:** вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов равна 55%.

**Задача 3.**

Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

**Решение.**

Обозначим через  событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза );

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза ).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса



По условию задачи имеем:

- вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру;

-вероятность того, что деталь попадает ко второму контролеру;

- вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной;

- вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной.

Искомая вероятность



Как видно, до испытания вероятность гипотезы  равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

**Задача 4.**

Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0.2. Найдите вероятность того, что будет от 3 до 7 попаданий.

**Решение:**

Пусть событие A = {*стрелок попадет от 3 до 7 раз*}

Так как вероятности попадания в цель при каждом выстреле одинаковы и равны 0,2, то имеем повторные независимые попадания и так как число выстрелов 10 мало, то для нахождения вероятности события А применим формулу Бернулли: , где *p*=0.2 – вероятность попадания при одном выстреле,

*q*=1- *p* =0.8 - вероятность непопадания при одном выстреле.

Так как *m* изменяется от 3 до 7, то вероятность события А найдем по формуле:

P*n(m1:m2) =* P*n(m1)+* P*n(m1+*1*)+…+* P*n(m2).*

Имеем,

P(A)=P10(3;7)= P10(3)+ P10(4)+ P10(5)+ P10(6)+ P10(7)=

+ или 32,21%.

**Ответ:** вероятность того, что будет от 3 до 7 попаданий, равна 32,21%.

***Вариант 1.***

**Задача 1.**

В полученной партии из 20 коробок лекарственных средств 5 коробок содержат брак. Для быстрого выяснения наличия брака в партии случайным образом вскрывают и обследуют 2 коробки. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна с браком.

**Решение***.*

Обозначим через *Аi* событие, состоящее в том, что *i*-ая извлеченная коробка окажется с браком; через *А* – хотя бы одна из коробок содержит брак. Тогда  – ни одна из коробок не содержит брак.

Чтобы наступило событие  необходимо, чтоб наступили одновременно события ,, т.е. =⋅. Тогда по теореме умножения вероятностей [P(*A⋅B*)=P(*A*)⋅P(*B*|*A*)] получим

P()=P(⋅)=P()⋅P(|)= =0,553,

где – вероятность того, что в первой коробке не будет брака;  – того, что во второй тоже не будет брака при условии, что в первой его не было. Итак

P(*А*)=1-P()=1–0,553=0,447,

т.е. при таком способе проверки мы обнаружим брак в 45% случаев.

*Ответ:* 0,447.

**Задача *2.***

Партия приборов состоит из приборов рижского и московского заводов. В партии 70% приборов рижского завода. Для прибора московского завода надежность (то есть вероятность безотказной работы) в течение времени *t*) равна 0,95, рижского – 0,92. Прибор испытывался в течение времени и работал безотказно. Найти вероятность того, что испытывался прибор московского завода.

***Решение.*** Обозначим через *В1* гипотезу « на испытание попал прибор рижского завода», *Р(В2)=*0,7.

Пусть *А* – событие «случайно отобранный прибор проработает безотказно в течение времени *t*».

По условию задачи *Р(А)=*0,3\*0,95+0,7\*0,92=0,929.

Вероятность того, что безотказно проработавший в течение времени прибор сделан на московском заводе, можно вычислить по формуле Байеса:



***Ответ***: вероятность того, что испытывался прибор московского завода равна 0,307.

**Задача 3.**

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет:

*а*) хотя бы одно попадание (событие ); *б*) не менее трех попаданий (событие ); *в*) не более одного попадания (событие ).

**Решение.**

Здесь 

*а*) Найдем вероятность противоположного события - в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель:



Тогда 

*б*) Событие заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания (событие ), либо четыре (событие ), т.е.  Отсюда



*в*) Аналогично вычисляется вероятность попадания в цель не более одного раза:



***Вариант 2.***

**Задача 1.**

### Группа туристов, в которой 7 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

**Решение.**

### Число всевозможных исходов при выборе четырех дежурных равно Все исходы равновозможные. Пусть *А* – событие, при котором выбраны 2 юноши и 2 девушки. Выбрать двух юношей из 7 можно способами, а выбрать двух девушек из 4 можно способами. Каждому выбору двух юношей соответствует выборов двух девушек. Значит, число исходов, благоприятствующих событию *А*, равно Отсюда получаем, что

### 

### Ответ: вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки равна 38%.

**Задача 2.**

В группе из 25 стрелков имеются 5 отличных, 12 хороших и 8 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0.85, для хорошего - 0.7, для посредственного - 0.6. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный стрелок попал в цель.

**Решение:**

Пусть событие A = {*выбранный стрелок попал*}. Для того, чтобы выяснить, выбранный стрелок промахнулся или попал, необходимо знать какой группе он принадлежит, а для этого введем события ={*стрелок из i-ой группы*}, *i=*1,2,3, где

Тогда вероятность события P(A) найдем по формуле полной вероятности:

.

Так как , то

.

**Ответ:** вероятность того, что выбранный стрелок попал, равна 69,8%.

**Задача 3.**

Молодожёны планируют, что у них будет 3 дочки и 2 сына. Считая, что у них действительно будет 5 детей найти шанс осуществления их желания, если вероятность рождения девочки 49%.

**Решение**.

Обозначим через *А* событие (успех), состоящее в том, что при данной беременности родится девочка. Тогда супружеская пара проводит 5 независимых «испытаний». Нас интересует событие, состоящее в наступлении ровно трёх успехов, и двух неуспехов. Воспользуемся формулой Бернулли наступления ровно *m* успехов в серии из *n* испытаний:

,

где *p* вероятность успеха в одном испытании. Итак, вероятность искомого события:

= =0,30601

**Ответ***:* вероятность этого события 30%.

**Одномерные случайные величины и законы их распределения**

***Образец решения***

**Задача 1.**

Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,5 | 0,1 |

Требуется:

а) найти и построить функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

в) найти вероятность того, что случайная величина Х примет значение из промежутка (0;2] двумя способами.

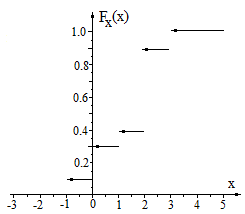
**Решение.**

a) Функцию распределения случайной величины найдем по формуле: .

Вычислим значение функции в каждом значении случайной величины и перенесем на числовую ось.

Таким образом, функция распределения случайной величины *X* имеет вид:

Построим график функции распределения:



Найдем числовые характеристики случайной величины .

Найдем вероятность события.

Так как - дискретная случайная величина, то для того чтобы найти вероятность события , необходимо выяснить какие значения случайной величины попали в интервал (0;2]. Замечаем, что в этот интервал попали , тогда .

**Задача 2.**

Плотность распределения случайной величины *Х* имеет вид:



Требуется:

а) найти функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

***Решение*.**







***Вариант 1.***

**Задача 1.**

Закон распределения  ДСВ  приведен в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,13 | 0,28 | 0,25 | 0,19 | 0,10 | 0,05 |

Требуется:

а) найти и построить функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

в) найти вероятность того, что случайная величина Х примет значение из промежутка (0;2] двумя способами.

# **Решение.**

а) Функция распределения случайной величины *X* имеет вид:

б) Найдем математическое ожидание СВ по формуле:



Найдем дисперсию СВ по формуле:



Найдем среднеквадратическое отклонение СВ по формуле:



в) Найдём вероятность того, что случайная величина Х примет значение из промежутка (0;2].

Так как - дискретная случайная величина, то для того чтобы найти вероятность события , необходимо выяснить какие значения случайной величины попали в интервал (0;2]. Замечаем, что в этот интервал попали , тогда .

**Задача 2.**

Плотность распределения случайной величины *Х* имеет вид:



Требуется:

а) найти функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

***Решение*.**









**Вариант 2.**

**Задача 1.**

Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,49 | 0,24 | 0,06 | 0,15 | 0,05 | 0,01 |

Требуется:

а) найти и построить функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

в) найти вероятность того, что случайная величина Х примет значение из промежутка (0;2] двумя способами.

# **Решение.**

а) Функция распределения случайной величины *X* имеет вид:

б) Найдем математическое ожидание СВ по формуле:



Найдем дисперсию СВ по формуле:



Найдем среднеквадратическое отклонение СВ по формуле:

.

в) Найдём вероятность того, что случайная величина Х примет значение из промежутка (0;2].

Так как - дискретная случайная величина, то для того чтобы найти вероятность события , необходимо выяснить какие значения случайной величины попали в интервал (0;2]. Замечаем, что в этот интервал попали , тогда .

**Задача 2.**

Плотность распределения случайной величины *Х* имеет вид:



Требуется:

а) найти функцию распределения случайной величины *Х*;

б) найти числовые характеристики М(*Х*), D(*X*), ;

***Решение*.**





